

ШИФР _____

10-14

Олимпиадная работа
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников

по математике

учащейся 10 «А» класса

муниципального автономного общеобразовательного учреждения «Средняя
общеобразовательная школа №27 с УИОП"

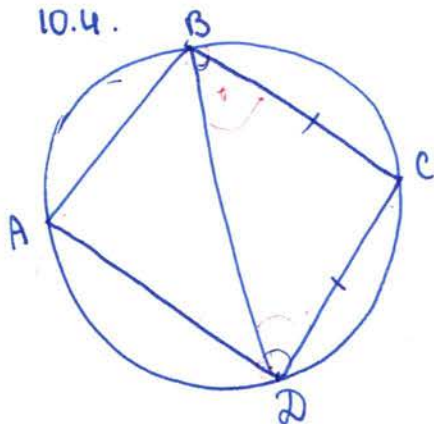
Алейниковой Ксении Александровны
(ФИО полностью)

Педагог-наставник:

учитель МАОУ «СОШ №27 с УИОП»

Хрипкова Светлана Алексеевна

Задача 10.4.



Дано: $AB = 10$
 $BC = CD = 25$
 $AD = 50$
 $\angle A + \angle D < 180^\circ$
 Найти: $\angle A + \angle D$

10-14

Решение:

1) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

По условию ABCD вписана в окружность $\Rightarrow \angle A + \angle C = \angle B + \angle D$
 если $\angle A + \angle D < 180^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = 180^\circ$

2) Рассмотрим $\triangle BDC$ - равнобедренный (т.к. по усь. $BC = CD$) $\Rightarrow \angle CBD = \angle CDB$
 $\angle CBD = \angle B - \angle ABD$, а $\angle CDB = \angle D - \angle ADB$ (т.к. $\angle D = \angle A + \angle C - \angle B$) $\Rightarrow \angle CBD =$
 $= \angle A + \angle C - \angle B - \angle ADB$

$\Rightarrow \angle B - \angle ABD = \angle A + \angle C - \angle B - \angle ADB$ ($\angle ADB = 180^\circ - \angle A - \angle ABD$)
 $\Rightarrow \angle B - \angle ABD = \angle A + \angle C - \angle B - 180^\circ + \angle A + \angle ABD$ } т.к. $\angle B = 180^\circ - \angle A \Rightarrow$

$180^\circ - \angle A - \angle ABD = \angle A + \angle C - 180^\circ + \angle A - 180^\circ + \angle A + \angle ABD$
 $- \angle A - \angle A - \angle A - \angle A = \angle C - 180^\circ - 180^\circ + \angle ABD - 180^\circ + \angle ABD$
 $-4\angle A = \angle C + 2\angle ABD - 540^\circ$; т.к. $\angle C = 180^\circ - 2\angle DBC \Rightarrow$

$-4\angle A = 180^\circ - 2\angle DBC + 2\angle ABD - 540^\circ = 2\angle ABD - 2\angle DBC - 360^\circ$
 • т.к. $\angle DBC = \angle B - \angle ABD = 180^\circ - \angle A - \angle ABD \Rightarrow$
 $\Rightarrow -4\angle A = 2\angle ABD - 2(180^\circ - \angle A - \angle ABD) - 360^\circ = 2\angle ABD - 360^\circ + 2\angle A +$

$+ 2\angle ABD - 360^\circ$
 $-4\angle A = 4\angle ABD + 2\angle A - 720^\circ$
 $-6\angle A = 4\angle ABD - 720^\circ \quad | :6$
 $\angle A = 120^\circ - \frac{2\angle ABD}{3}$

3) $\angle C = 180^\circ - 2\angle DBC = 180^\circ - 360^\circ + 2\angle A + 2\angle ABD = 2\angle A + 2\angle ABD - 180^\circ =$
 $= 240^\circ - \frac{4\angle ABD}{3} + 2\angle ABD - 180^\circ = 60^\circ + \frac{2\angle ABD}{3}$ (предположение не сдвиг сторон)

4) $\angle B = \angle ABD + \angle DBC = \angle ABD + 180^\circ - \angle A - \angle ABD = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 120^\circ + \frac{2\angle ABD}{3}$
 $\angle B = 60^\circ + \frac{2\angle ABD}{3}$

5) $\angle A + \angle D < 180^\circ$, $\angle D = \angle A + \angle C - \angle B \Rightarrow \angle A + \angle A + \angle C - \angle B < 180^\circ$
 $2\angle A + \angle C - \angle B < 180^\circ \Rightarrow 240^\circ - \frac{4\angle ABD}{3} + 60^\circ + \frac{2\angle ABD}{3} - 60^\circ - \frac{2\angle ABD}{3} < 180^\circ$

$240^\circ - \frac{4\angle ABD}{3} < 180^\circ$
 $-\frac{4\angle ABD}{3} < -60^\circ$
 $\frac{4\angle ABD}{3} > 60^\circ \quad | :3$

(предположение не сдвиг сторон)

№ п/п	Баллы	Подпись	Расшифровка
1	0	И.И.И.	Морехова И.А.
2	0	И.И.И.	Морехова И.А.
3	1	И.И.И.	Морехова И.А.
4	0	И.И.И.	Морехова И.А.
5	0	И.И.И.	Морехова И.А.

Задача 10.4 (продолжение)

10-14

$$4 \angle ABD > 180^\circ \quad | :4$$

$$\angle ABD > 45^\circ$$

Пусть $\angle ABD = 48^\circ$,

Тогда $\angle A = 120^\circ - \frac{2\angle ABD}{3} = 120^\circ - \frac{2 \cdot 48^\circ}{3} = 120^\circ - 32^\circ = 88^\circ$

$$\angle C = 60^\circ + \frac{2\angle ABD}{3} = 60^\circ + \frac{2 \cdot 48^\circ}{3} = 60^\circ + 32^\circ = 92^\circ$$

$$\angle B = 60^\circ + \frac{2\angle ABD}{3} = 60^\circ + 32^\circ =$$

4) $\angle B = \angle ABD + \angle DBC$; $\angle DBC = 180^\circ - \angle C - \angle BDC \Rightarrow \angle DBC = \frac{180^\circ - \angle C}{2}$

$$\begin{aligned} \angle B &= \angle ABD + \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \angle ABD + \frac{180^\circ - 60^\circ - \frac{2\angle ABD}{3}}{2} = \angle ABD + \frac{120^\circ - \frac{2\angle ABD}{3}}{2} = \\ &= \angle ABD + \frac{2(60^\circ - \frac{\angle ABD}{3})}{2} = \angle ABD + 60^\circ + \frac{\angle ABD}{3} = \frac{4\angle ABD}{3} + 60^\circ \end{aligned}$$

5) $\angle A + \angle D < 180^\circ$; $\angle D = \angle A + \angle C - \angle B \Rightarrow \angle A + \angle A + \angle C - \angle B < 180^\circ$
 $2\angle A + \angle C - \angle B < 180^\circ \Rightarrow 240^\circ - \frac{4\angle ABD}{3} + 60^\circ + \frac{2\angle ABD}{3} - 60^\circ - \frac{4\angle ABD}{3} < 180^\circ$
 $240^\circ - \frac{6\angle ABD}{3} < 180^\circ$

$$-\frac{6\angle ABD}{3} < -60^\circ \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{6\angle ABD}{3} > 60^\circ \quad | :3$$

$$6\angle ABD > 180^\circ \quad | :6$$

$$\angle ABD > 30^\circ$$

Пусть $\angle ABD = 63^\circ$; (также $\angle A + \angle D < 180^\circ$)

Тогда $\angle A = 120^\circ - \frac{2\angle ABD}{3} = 120^\circ - \frac{2 \cdot 63^\circ}{3} = 120^\circ - 42^\circ = 78^\circ$

$$\angle C = 60^\circ + \frac{2\angle ABD}{3} = 60^\circ + \frac{2 \cdot 63^\circ}{3} = 60^\circ + 42^\circ = 102^\circ$$

$$\angle B = \frac{4\angle ABD}{3} = \frac{4 \cdot 63^\circ}{3} = 4 \cdot 21^\circ = 84^\circ$$

$$\angle D = 78^\circ + 102^\circ - 84^\circ = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$$

Значит $\angle A + \angle D = 78^\circ + 96^\circ = 174^\circ < 180^\circ$ (удовлетв. условию)

Ответ: $\angle A + \angle D = 174^\circ$

Проверка:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$$

$$78^\circ + 102^\circ = 84^\circ + 96^\circ$$

$$180^\circ = 180^\circ$$

Задача 10.3.

10-14

$$(x^2 + 10x + q)(x^2 + 10x + q + 18) = 0$$

$$x^2 + 10x + q = 0$$

или

$$x^2 + 10x + q + 18 = 0$$

$$D = 100 - 4q$$

$$D = 100 - 4(q + 18) = 100 - 4q - 72 = 28 - 4q$$

$$x_1 = \frac{-10 + \sqrt{100 - 4q}}{2} = \frac{-10 + \sqrt{4(25 - q)}}{2}$$

$$= \frac{-10 + 2\sqrt{25 - q}}{2} = \frac{2(-5 + \sqrt{25 - q})}{2}$$

$$= -5 + \sqrt{25 - q}$$

$$x_1 = \frac{-10 + \sqrt{28 - 4q}}{2} = \frac{-10 + \sqrt{4(7 - q)}}{2}$$

$$= \frac{-10 + 2\sqrt{7 - q}}{2} = \frac{2(-5 + \sqrt{7 - q})}{2}$$

$$= -5 + \sqrt{7 - q}$$

$$x_2 = \frac{-10 - \sqrt{100 - 4q}}{2} = -5 - \sqrt{25 - q}$$

$$x_2 = \frac{-10 - \sqrt{28 - 4q}}{2} = -5 - \sqrt{7 - q}$$

Получается $-5 + \sqrt{25 - q}$, $-5 - \sqrt{25 - q}$, $-5 + \sqrt{7 - q}$, $-5 - \sqrt{7 - q}$ - значения задачи арифметическую прогрессию

Пусть $q = -11$, тогда $-5 + \sqrt{25 + 11} = -5 + \sqrt{36} = -5 + 6 = 1$

$-5 - 6 = -11$; $-5 + \sqrt{7 + 11} = -5 + \sqrt{18} = -5 + 3\sqrt{2}$;

$-5 - \sqrt{18} = -5 - 3\sqrt{2}$

Корни в геометрической прогрессии: -11 ; $-5 - 3\sqrt{2}$; $-5 + 3\sqrt{2}$; 1

Таким образом, 1-ый член прогрессии может быть -11

Ответ: -11 .

Задача 10.5.

Всего Артем выписал 15 действительных чисел;

Всего произведений из этих чисел возможно составить 15

Пример: $a_1 a_2 a_3 = 1$ $a_1 a_3 a_4 = 3$ $a_3 a_4 a_5 = 5$ $a_4 a_5 a_6 = 7$ и т.д.

$$k(\max) = 2k + 1 = 15$$

$$2k = 15 - 1$$

$$k = \frac{15 - 1}{2}$$

Ответ: $k(\max) = \frac{15 - 1}{2}$